C(1+ r T) < C(1+r)T sis T > 1
fin de période -> post-compte tetrm echu
debut de periode -> pres-compté terme echoir (taux precompté=taux d'escompte ou taux poste-compte=in fin)
taux continue **F = C exp(rt)**
taux de rentabilité actuariel tel que F = C (1+r*)^T

$$\sum_{\Theta=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^{\Theta}} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Effet levier ri=e(1-τ)**rd+(1-e)ra**

ri = taux de rentabilité interne de l'investissement (taux actuariel de I) ;

τ= taux d'impôt sur les sociétés (34% exemple);

rd = coût de la dette avant impôt (taux actuariel de E) ;

e = part de l'endettement dans le financement (e .[0, 1])9;

(1 – e) = part des fonds propres ((1 – e) .[0, 1]);

ra = taux de rentabilité des fonds propres investis dans l'opération (taux actuariel de A).

ra augmente avec e si ri > (1 – τ) rd

Annualisation du taux période et TEG

$TEG = m\, r*$

avec $r*$ $le\ TRI$ $\quad -(cred - frais) + \sum_{i=1}^{n} \frac{annulité}{(1+r)^{i}}$

Obligation

τ= Jc/Na avec Na jours exact

Coupon couru = 100 k τ
Cours plein coupon

$$C'_{\tau} = 100(1+r_{\tau})^{\tau}\left[\frac{k}{(1+r_{\tau})} + \frac{k}{(1+r_{\tau})^{2}} + \ldots + \frac{k+1}{(1+r_{\tau})^{n}}\right]$$

pied de coupon en τ $\quad C_{\tau} = C'_{\tau} - 100k\,\tau$
Vr- Vn = prime de remb Vn –Ve = prime d'emm

Sensibilité et Duration

$$S = \frac{-dV}{Vdr} = \sum_{\theta=tl}^{\theta=tn} \frac{\theta F_{\theta}}{V(1+r_{\theta})^{\theta+1}} \qquad D = \sum_{\theta=tl}^{\theta=tn} \frac{\theta F_{\theta}}{V(1+r_{\theta})^{\theta}}$$

Convexité

$$C = \frac{-d^{2}V}{Vd^{2}r} = \sum_{\theta=tl}^{\theta=tn} \frac{\theta(\theta+1)F_{\theta}}{V(1+r_{\theta})^{\theta+2}}$$

calcule pratique Vr Vr+0.1% =-DV/Dr ;

D=S(1+r) et D-/D+=V+/V-

taux propor S=T/(1+rT) D=S(1+rT)

taux cont D=S

Protefeille
si A=B insensible au var taux sis Sa=Sb

car dV= (A*Sa-P*Sb)dr

Mt(marge fin)= KA(t)(agio crediteurs) – K'P(t) –(r(0) +dr)G(t)

dMt = Gt*dr/100

pour anuler le risque =>G(t)=0

-capitale restant dû $\quad K_{t} = \sum_{\theta=1}^{\theta=n} \frac{F_{\theta}}{(1+k)^{\theta}}$

L'impasse (ou Gap) de la période t (Gt = At – Pt).

$$s = \underbrace{r_{max} - E(\tilde{r})}_{compensation\,de\,baisse\,de\,E(\tilde{r})} + \underbrace{\pi}_{prime\,de\,risque\,stricto\,sensu}$$

$$r_{max} = r + s$$

triangle de credit exemple

$$s = \underbrace{\pi}_{prime\,de\,risque\,stricto\,sensu} + \underbrace{p(1-\alpha)}_{compensation\,de\,baisse\,de\,esperence}$$

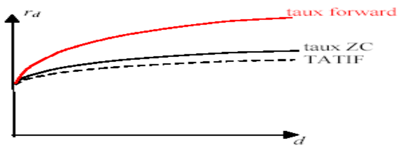
$$X = \begin{Bmatrix} F\ avec\,une\ proba\ 1-p \\ \alpha F\ avec\ une\ proba\ p \end{Bmatrix}$$

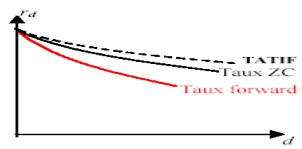
Game

tatif = taux Act de rendm des Titre remb In Fin = Flat

(1+Fn,d)^d=(1+Rn+d)^n+d/(1+Rn)^n

Fn,d=((n+d)Rn+d –nRn)/d(1+nRn)





$f_{n,1} = e_{n,1}(t) + L_{n}$ $\quad$ prime de liquidite

$$r_{\theta} = f(\theta, r, s) \Rightarrow dr_{\theta} = \frac{\delta f}{\delta r}dr + \frac{\delta f}{\delta s}ds$$

$$S_{r} = \sum_{\theta=tl}^{\theta=tn} \frac{\theta F_{\theta}}{V(1+r_{\theta})^{\theta+1}} \frac{\delta f}{\delta r} \qquad S_{s} = \sum_{\theta=tl}^{\theta=tn} \frac{\theta F_{\theta}}{V(1+r_{\theta})^{\theta+1}} \frac{\delta f}{\delta s}$$

$$\frac{-dV}{Vdr} = S_{r}dr + S_{s}ds$$

Taux révisable: approche par les taux forward

$$V = b_{t_1}(0) D_{1} E_{k}(t_{1}-k) + \sum_{i=2}^{N} b_{t_i}(0) D_{i} f_{t_1-k, D_i} + b_{t_N}(0)$$

$$V(n^{-0}) = 1 + C_{N}$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{i} [1 + D_{k} R(k-1)]}_{connu\,dé\,i-1} \underbrace{\prod_{k'=i+1}^{p} [1 + D_{k'} R(k'-1)]}_{duplicable\,par\,1\,€\,invisté\,en\,i}$$

$$S_{e} = J_{v} - J_{f}$$

$$M^{B} > M^{A}\ et\ m^{B} > m^{A}$$
$$(M^{A} - m^{A}) < s < (M^{B} - m^{B})\ ou\ (M^{B} - m^{B}) < s < (M^{A} - m^{A})$$

FT=r+s

pricing du swap » l'établissement

valorisation du swap» le calcul de la valeur (positive ou négative) du swap à toute autre date ultérieure.

Le taux offert (ou Ask) est le taux auquel le market-maker reçoit le taux fixe Bid#

La valeur de la jambe fixe est déterminée par un taux long (TATIF) alors que celle de la

jambe variable dépend d'un taux court :

Actions

R : recettes annuelles ; ***C :*** charges d'exploitation
La marge ***R-C*** s'appelle l'***EBITDA***
DA dotations aux amortissements annuels sont d'un montant
La société finance ses actifs d'un montant ***K*** à concurrence de *D* par un emprunt in fine au taux ***i*** et ***K – D*** par des fonds propres.
Bénéfice avant impôt = EBITDA – DA – iD .
1er cas : ***EBITDA*** < *iD*. ==> liquidation.
2ème cas : *iD* = ***EBITDA*** = *DA + iD ==> pas de div et pas defaut de pay*
3ème cas : ***EBITDA*** *> DA + iD et la société est bénéficiaire.*
==> pay les impot IS

- S_- la valeur boursière d'une action juste avant l'émission;
- S_+ sa valeur boursière juste après l'émission,
- S_n sa valeur nominale,
- N le nombre initial d'actions, c'est-à-dire juste avant l'émission,
- n le nombre de nouvelles actions émises et $N+n$ le nombre d'actions juste après l'émission,
- S_e la valeur d'émission des nouvelles actions ; on observe en général : $S_n = S_e < S_+ < S_-$,

$$C_b^- = NS^- \quad C_b^+ = (N+n)S^+ \; et \; C_b^+ = C_b^- + nS_e$$

$$S^+ = \frac{C_b^+}{N+n}$$

$$prime\ d'emission = n(S_e - S_n)$$

Protiction

D droit de souscription

$$D = S^- - S^+ \quad action \Rightarrow droit\ n/N\ action\ au\ prix\ S_e$$

$$D = \frac{n(S^+ - S_e)}{N} = \frac{n(S^- - S_e)}{N-n}$$

SI actions gratuites

$$C_b^+ = C_b^- \Rightarrow S^+ = \frac{N}{N+n} S^- \Rightarrow D_a = \frac{n}{N+n} S^- = \frac{n}{N} S^+$$

Evaluation:

A tout instant t, le cours de l'action ajustée est défini par

$$S^a(t) = S(t) * \prod_{i=1}^{m} \alpha_j$$

evaluation statique :
Valeur des fonds propres = Valeur des actifs – dettes =A
Valeur Comptable d'action = A/(nembre d'actions)
evaluation dynamique:

$$S(0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathrm{Div}_t}{(1+r_a)^t} + \frac{S_T}{(1+r_a)^T}$$

r_a *rentabilite exegé par les actionnares*

$$S_T = E_0(S(T))$$

si div croit a un taux g (growth) constant

$$Si\ on\ a\ \mathrm{div}_t = \mathrm{div}_{T+1}\ pour\ t > T$$

$$\frac{S_T}{(1+r_a)^T} = \frac{\mathrm{div}_{T+1}}{r_a(1+r_a)} = \left(\frac{1+g}{1+r_a}\right)^T \frac{\mathrm{div}_1}{r_a} = 0\ si\ g < r_a\ et\ T = \infty$$

==>Formule de *Gordon-Shapiro*

$$S(0) = \frac{\mathrm{div}_1}{(r_a - g)}$$

Méthode du PER:(Price Earning Ratio)

$$\mathrm{PER}_x = \frac{S^x(\text{observé})}{\text{Bénéfice net par action x}}$$

$$S^x(\text{theorique}) = PER(\text{societé comparabl}) * \textit{Bénéfice net par actionx}$$

$$S = \frac{\text{div par actio}}{r_a - g} = \frac{\lambda * \text{Bénéfice net par action x}}{r_a - g}$$

$$\Rightarrow PER = \frac{\lambda}{r_a - g}$$

div constituant une fraction **λ** du bénéf

Méthode mixte:

$$C_b = alphaFP + (1-\alpha) VP(\mathrm{Div})$$

$$exmpl\ méthode\ du\ Goodwill : C_b = FP + \sum_{i=1}^{T} \frac{\mathrm{div} - r_a FP}{(1+r_a)^t}$$

$r = CMPC = (1-e)\, r_a + e\,(1-\tau)\, r_d$
e : part de la dette financière dans le financement(0 <*e* <1),
τ : est le taux d'imposition des bénéfices des sociétés
r_a : est le coût des fonds propres
r_d : le coût moyen de la dette financière avant impôt.
$r_a = r_0$ + prime de risque,
MEDAF ==> $r_a = r_0 + \beta\,(E(R_m) - r_0)$

Avoir fiscal :
Div+Avf * DIV ==>div imposable
div imposable * taux d'imposition -Avf*Div ==>impo a payer
log- rentabilité. :

$$R_{0,T} = \mathrm{Ln}\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = \mathrm{Ln}(S(T)) - \mathrm{Ln}(S(0))$$

la log- rentabilité *R* annualisée

$$R = \frac{1}{T}[\mathrm{Ln}(S(T)) - \mathrm{Ln}(S(0)]$$

$$R_{0,T} = \sum_{t=1}^{T} R_t$$

représentation de l'évolution des prix à l'aide d'un mouvement brownien géométrique
modèle log-gaussien
on supose que ΔLnS *IID*
$LnS(t+\Delta t) - LnS(t) = \Delta LnS = m\,\Delta t + \sigma\,\Delta W$,
avec ΔW distribué selon $N(0, \sigma^2 \Delta t)$
==>$dLnS(t) = m\,dt + \sigma\,dW(t)$ ==> EDS

$$\frac{dS}{S} = \mu\,dt + \sigma\,dW(t) \Leftrightarrow S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

le processus possède une *barrière absorbante* en 0.
car il s'arrête
L'espérance de la rentabilité : le taux d'intérêt et la prime de risque

$$\underbrace{\mu(t)}_{\text{Espérance de rentabilité}} = \underbrace{r(t)}_{\text{taux sans risque}} + \underbrace{\theta(t)}_{\text{prime de risque}}$$

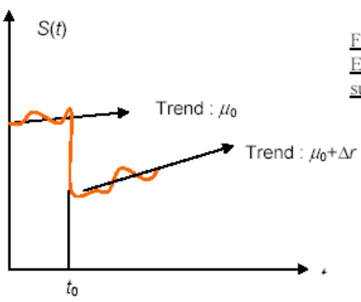


Figure 2 :
Effet d'un accroissement Δr du taux d'intérêt sur le cours $S(t)$ d'un titre

-------portefeuille---

$$V_t=\sum_{i=1}^{N} a_i * p_{i,t} \quad avec\, \alpha_i=\frac{a_i * P_{i,t_0}}{V_{t_0}} \Rightarrow R(t,t_0)=\alpha' r(t_{0,}t_1)$$

$$a_i=\frac{\alpha_i}{p_{i,t_0}} V_{t_0} \qquad E[R(t_{0,}t_1)]=\alpha' E[r((t_{0,}t_1))]$$

$$VAr(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

$$Var(R)=\alpha'\Sigma\alpha$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Distribution

coefficient d'asymétrie appelé **Skewness**

$$\tau_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(r_i(t_{j-1},t_j)-\mu_i)^3}{\sigma_i^3}$$

si >0 ==> vers valeurs > μ

=0 si normal

coefficient d'aplatissement appelé aussi **Kurtosis**

$$k_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(r_i(t_{j-1},t_j)-\mu_i)^4}{\sigma_i^4}$$ >3 ==> plus epaiss que norm

VaR: P[(V+VaR)<0] <*θ*

$$pour\ IIND\ VaR=\Phi^{-1}\sigma_p-\mu_p$$

Utilite:

avenir certain : croissante et concave u(X)

l'incertain:

Ux=E (u(X))

paradox de Saint Petersburg le fain 2^n proba (½)^n

*E(X)=Σ(½)^n*u(2^n)<∞ si u concav*

U : la fonction d'utilité effective est. Concav

aversion pour le risque

$X=X_0+\varepsilon \Rightarrow U(X_0) \geqslant E(u(X)) \Rightarrow \exists\pi\ U(X_0-\pi)=E(u(X))$

$$\pi=\frac{-1}{2}\frac{U''(X_0)}{U'(X_0)}\sigma^2 \quad \lambda=\frac{-1}{2}\frac{U''(X_0)}{U'(X_0)}\geqslant 0$$

λ aversion absolue pour le risque

$$\lambda_R(X)=X\,\lambda(X)\Rightarrow aversion\ relative$$

exemple de fonct d'Utilité

CARA : Constant Absolut Risk Aversion

u(X)=exp(-λX)

Utilité quadratique

u(X) = X - λX²

Moyenne variance:

programme

$$\left\{\begin{matrix} Max(E(R_p)) \\ \alpha \\ \text{sous}\ \sigma(R_p)=\sigma\ et\ C(\alpha) \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} Min(\sigma(R_p)) \\ \alpha \\ \text{sous}\ E(R_p)=r\ et\ C(\alpha) \end{matrix}\right\}$$

Avec actif sans risque

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha' 1_N\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0_N\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}-(\mu-r1_N)'\Sigma^{-1}1_N\\ \Sigma^{-1}(\mu-r1_N)\end{pmatrix}$$

λ= aversion pour le risque

Sans actif sans risque

$$\alpha=\frac{1}{1_N'\Sigma^{-1}1_N}\Sigma^{-1}1_N+\frac{1}{\lambda}\Sigma^{-1}(\mu-\frac{1_N'\Sigma^{-1}\mu}{1_N'\Sigma^{-1}1_N}1_N)$$

= portf risque min + portf neutre au risque puisqu'il sera choisi si l'aversion au risque tend vers 0.

MEDAF:

H0=porft du Marché est (tous et que les actif risques) est efficient

pour un P effi==> $\mu_p=r+(\frac{\mu_M-r}{\sigma_M})\sigma_p$ droite du marché

$$\mu_M-r=prime\ du\ marché\ du\ risque$$

$$(\frac{\mu_M-r}{\sigma_M})=prix\ de\ marché\ du\ risque\ par\ prtf$$

MEDAF Genral

sou H0 : ∃ λ et θ

$$\mu_i=\lambda+(\frac{\mu_M-\lambda}{\sigma_M^2})\sigma_{\text{iM}}=\lambda+\beta_i(\mu_M-\lambda)$$

$$\beta_i=\frac{\sigma_{\text{iM}}}{\sigma_M^2}=risque \quad (\mu_M-\lambda)=prix\ du\ risque$$

MEDAF Standard

si ∃ r sans risque alors :

$$\mu_i=r+\beta_i(\mu_M-r)$$

exemple: ∃ obligation d'etat indexe sur l'inflation

$$\beta_i=\frac{cov(\mu_M,\mu_i)}{Var(\mu_M)}$$

$$P_i^0=\frac{E(P_i^1)-\theta Cov(P_i^1,R_M)}{1+r} \quad avec\ \theta=(\mu_M-r)/\sigma_M^2$$

c'est le prix de marché du risque divisé par σ_M, = prix de marché du risque par point de covariance.

Proposition (MEDAF zéro-bêta de Black):

Sous l'hypothèse (H),

les portefeuilles ou actifs z dont la rentabilité n'est pas corrélée

avec le portefeuille de marché M ont tous la même rentabilité espérée uz;

$$\mu_i=\mu_z+\beta_i(\mu_M-\mu_z)$$